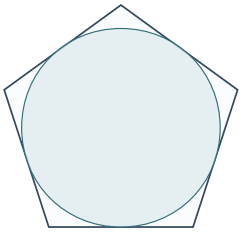
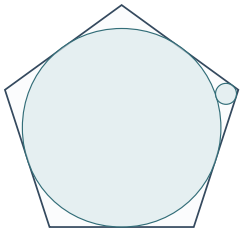
n = 1-8
最优填充证明整合

连续半径与九位小数答案，分开说明

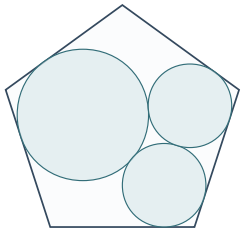
本册整理已经完成并独立核验的 n = 1-8 结果。
证明方法包括初等几何论证与计算机辅助的完整覆盖证书。



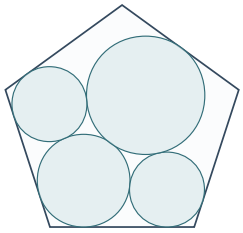
n = 1
0.688190959



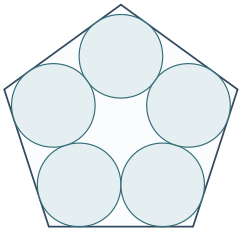
n = 2
0.760845212



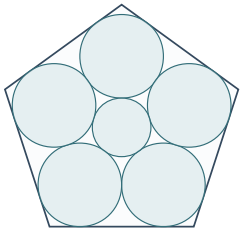
n = 3
1.034563887



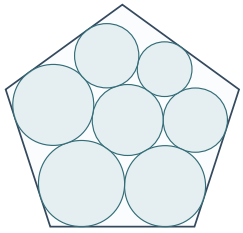
n = 4
1.250988878



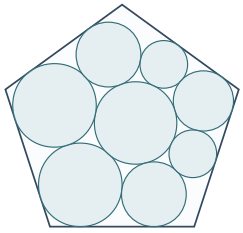
n = 5
1.447980549



n = 6
1.651074767



n = 7
1.740983297



n = 8
1.852488896

图示使用随包的九位小数可行答案。图下数值为半径总和，不是圆周长总和；插图只作几何示意，严谨结论以正文和证书为准。

阅读顺序：先看结论与定义，再看各 n 的证明思路，最后按复核入口核查证书。
本册是读者导读；完整可复核数据与程序见配套 ZIP。
整理日期：2026 年 10 月 18 日

阅读说明与结论

本说明把同一几何问题的两个版本分开证明：

1. **连续问题**：圆心坐标和半径可以取任意实数。
2. **九位小数问题**：在指定的官方坐标系中，所有圆心坐标和半径必须是 10^{-9} 的整数倍，且每个半径严格为正。

目标均为**半径之和**，不是面积之和，也不是把半径和再乘上 2π。下表连续值只是方便阅读的近似；精确定义见后文。九位小数列则是精确的、能够达到的全局最优值。

圆数 n	连续全局最优半径和 S_n（近似）	官方九位小数全局最优半径和 G_n（精确）
1	0.688190960235586769	0.688190959
2	0.760845213036122857	0.760845212
3	1.034563887852745239	1.034563887
4	1.250988879234854836	1.250988878
5	1.447980550405670367	1.447980549
6	1.651074770596782374	1.651074767
7	1.740983299207393613	1.740983297
8	1.852488899111271346	1.852488896

对于 $n = 3, \ldots, 8$，连续最优构型还被证明在正五边形的二面体对称和圆的重新编号之外是唯一的。这里没有声称九位小数最优构型也唯一。

证明性质。 $n = 1, 2$ 的连续上界有简短的初等几何证明。$n = 3, 5, 6$ 的最优构型可用根式明确给出，$n = 4, 7, 8$ 由明确的多项式接触方程组及有理隔离盒定义。对于 $n = 3$ 至 8 的全局上界和较复杂的格点排除，本证明使用**有限、可独立复验的计算机辅助证书**。它不是一篇只靠手算完成的全局证明，也不把“数值优化没有找到更好答案”当成证明。

证明分为四个逻辑层次：精确构型可行；所有有竞争力的构型必接近该构型；该邻域内连续问题不能改进；原始官方格点中也不存在更高分构型。最后三层各有独立证书，不能用其中一层替代另外两层。

1. 几何定义与两个坐标系

令

$$a=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{5},\qquad R=\frac{1}{2\sin(\pi/5)},\qquad \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

其中 a 为内切圆半径，R 为外接圆半径。采用中心在原点、顶点向上的坐标系：

$$V_k=R\big(\cos(\pi/2+2k\pi/5),\sin(\pi/2+2k\pi/5)\big),\quad k=0,\dots,4.$$

五个外法向量为

$$u_k=\big(\cos(7\pi/10+2k\pi/5),\sin(7\pi/10+2k\pi/5)\big).$$

半径为 $r_i>0$、圆心为 p_i 的闭圆盘组成合法排列，当且仅当

$$u_k\cdot p_i+r_i\le a\quad\text{对所有 } i,k,\qquad \|p_j-p_i\|\ge r_i+r_j\quad(i<j).$$

允许相切，不允许内部重叠。正五边形面积为 $5a/2$。

官方坐标由平移得到：

$$(x,y)_{\text{official}}=(x,y)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4},a\right).$$

只有在这个**未旋转的官方坐标系**中才要求 10^{-9} 格点。旋转正五边形通常不会把这个格点格映回自身，这是连续证明与九位小数证明必须分开的主要原因。

一个反复使用的事实是：半径 $r\le a$ 的圆心可行域恰为

$$P\ominus B_r=(1-r/a)P.$$

它来自五条边的支持数同时由 a 减为 $a-r$，不是近似。

2. n＝1、2：初等连续证明与精确格点排除

2.1 一个圆

把五条包含不等式相加，利用 $\sum_k u_k=0$，得到 $5r\le 5a$。中心在原点、半径 a 达到上界，所以 $S_1=a$。

对于九位小数半径，唯一尚需排除的较高候选是 $r = 0.688190960$。该圆的圆心必须距离真实中心不超过

$$R(1 - r/a) < 2.912013 \times 10^{-10}.$$

然而真实中心的官方横坐标 $(1+\sqrt{5})/4$ 距离最近的九位小数横坐标 0.809016994 大于 3.749474×10^{-10}，已超过上述半径。因此该候选不可能。

下列官方坐标则被精确验证为可行：

$$(0.809016994,\ 0.688190960,\ 0.688190959).$$

故 $G_1 = 0.688190959$。此处显示的小数比较在验证程序中由代数数有理包围和整数比较完成，不依赖浮点舍入。

2.2 两个圆的连续上界

设 $s = r_1 + r_2$。由圆心可行域及三角不等式，

$$s \le \|p_1 - p_2\| \le \|p_1\| + \|p_2\| \le R(2 - s/a).$$

因此

$$S_2 = \frac{2aR}{a+R} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}.$$

达到上界的构型为：一个圆心为原点、半径为 a 的内切圆，另一个圆半径 $\rho = S_2 - a$、圆心 $(1-\rho/a)V_k$。第二个圆接触该顶点邻接的两条边，并与内切圆相切。

2.3 两个圆的格点排除

连续上界已经排除半径和至少 0.760845214。若格点半径和为 $s = 0.760845213$，由一个圆的格点结论，两半径均不超过 $r_m = 0.688190959$。

令 $\lambda_i = 1 - r_i/a$。两个缩小正五边形之间的最远点对可以在顶点上取得；最远的顶点方向相差 144°，故

$$D^2 \le R^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\cos(\pi/5)\lambda_1\lambda_2\right).$$

固定 s 即固定 $\lambda_1 + \lambda_2$，右边在 $\lambda_1\lambda_2$ 最小时最大。因此只需取极端半径 r_m 与 $s - r_m$。精确代数比较给出 $D^2_{\max} - s^2 < 0$，与不重叠要求矛盾。

为使这一关键符号检验可直接核对，设 $v = \sqrt{5}$、$b = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$；其分子形式为

$$a^2(D_{\max}^2-s^2)=\frac{14894427183368180985+56000000014713791 72v-3804226065000000000b-1521690426000000000vb}{20000000000000000000}<0.$$

精确可行的官方两个圆为

$$(0.809016994,0.688190960,0.688190959),$$

$$(1.532623791,0.923305061,0.072654253).$$

因此 $G_2=0.760845212$。附件中的 `prove_n1_grid_optimum.py` 和 `prove_n2_grid_optimum.py` 重现上述格点排除。

3. n＝3、5、6 的精确构型

本节只证明所给数值**能够达到**。它们为何不能被其他构型超过，由第 5 至 8 节的全局覆盖及刚性证明完成。

3.1 三个圆

记

$$r=\frac{a}{1+2a},\qquad A=R^2/a^2-1,$$

$$B=-\frac{R^2}{a}(2+2\varphi r)-2r,\qquad C=R^2(1+4r^2+2\varphi r)-r^2,$$

$$\rho=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

这里取较小的正根，且 $0<\rho<a$。三个圆为

$$((1-\rho/a)V_3,\rho),\qquad (2rV_0,r),\qquad (2rV_1,r).$$

两个小圆的中心距为 $2r$，其包含条件由 $2ar+r=a$ 给出。大圆与任一个小圆的中心距平方为

$$R^2\left[(1-\rho/a)^2+4r^2+2\varphi r(1-\rho/a)\right]=(\rho+r)^2.$$

这正是定义 ρ 的二次方程。因此构型精确可行，$S_3=\rho+2r$。

3.2 五个圆

仍取 $r = a/(1+2a)$，在五个圆心 $2rV_k$ 放置半径 r 的圆。每圆与顶点邻接两边相切；相邻圆心距 $2r$，不相邻圆心距 $2\varphi r > 2r$。因此

$$S_5 = 5r = \frac{5}{2\tan(\pi/5) + 2}.$$

3.3 六个圆

在上述五圆构型中央加入半径 $(2R-1)r$ 的圆。它与每个外圈圆的中心距为 $2Rr = r + (2R-1)r$，故与五圆同时相切。于是

$$S_6 = (4 + 2R)r = \frac{4 + \csc(\pi/5)}{2\tan(\pi/5) + 2}.$$

4. n＝4、7、8：精确代数根，而非浮点答案

4.1 四个圆的二元方程

令 $C_0 = \cos(2\pi/5)$、$H = R/a + 1$，未知量为 u, v。定义

$$k_u = 1 - u/a, \quad k_v = 1 - v/a, \quad c = \frac{R + a - Hu}{2}, \quad w = a - c.$$

求解多项式方程组

$$F_1(u,v) = R^2(k_u^2 + k_v^2 - 2C_0 k_u k_v) - (u+v)^2 = 0,$$

$$F_2(u,v) = w^2 + R^2 k_v^2 + 2C_0 w R k_v - (c+v)^2 = 0.$$

取以以下两个**精确十进制有理数**为中心、每个坐标半宽 10^{-60} 的盒中唯一根：

- $u_0 =$ 0.321339608917080285683230723262498557439414760822588582551005368037207577073961；
- $v_0 =$ 0.259748495362427874884914035206381543592179054114463317338856644619434919976224。

四圆为

$$(k_u V_2, u), \quad (k_v V_3, v), \quad ((a-c)u_4, c), \quad (k_v V_1, v),$$

故 $S_4 = u + 2v + c$。这里的 u_4 是第 1 节定义的第 4 个外法向量，不是未知半径 u。

根的存在和隔离并非假定：取证书中的有理矩阵 Y，映射 $z \mapsto z - YF(z)$ 严格把上述盒映入自身，且其无穷范数收缩常数小于 6.455×10^{-17}。Banach 不动点定理及 Y 可逆性给出唯一精确根。再逐项检验正半径、全部墙约束和全部圆间约束，即得精确可行性。

4.2 七、八个圆的接触方程组

以下圆编号从 0 开始，边编号沿用第 1 节。对指定墙接触 (i, k) 使用

$$u_k \cdot p_i + r_i - a = 0;$$

对指定圆接触 (i, j) 使用

$$\|p_j - p_i\|^2 - (r_i + r_j)^2 = 0.$$

七圆系统： 21 个未知量，9 条墙接触和 12 条圆接触。

墙接触：`(0,3), (1,4), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,0), (5,1), (6,0)`。

圆接触：`(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (4,5), (5,6)`。

八圆系统： 24 个未知量，10 条墙接触和 14 条圆接触。

墙接触：`(0,4), (1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (4,2), (5,3), (6,0), (6,1), (7,0)`。

圆接触：`(0,2), (0,3), (0,7), (1,3), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,5), (6,7)`。

每个系统的根由相应文件 `n7_proof/n7_generic_contact_rigidity.json` 或 `n8_proof/n8_generic_contact_rigidity.json` 中 `root_certificate.midpoint` 的完整有理数组以及半宽 10^{-60} 的盒精确定义。数组按 $(x_0, y_0, r_0, x_1, y_1, r_1, \ldots)$ 排列；十进制字符串视为精确有理数，不先转换成双精度浮点数。这些数组是定义的一部分，打印表格或示意图不能替代它们。

同样使用映射 $z - YF(z)$：七圆收缩常数小于 5.192×10^{-15}，八圆小于 6.553×10^{-15}，均严格自映射。验证程序从方程重新求导，检查矩阵可逆性、所有正半径与所有未指定接触的严格间隙。正的半径和保证平方接触式确实表示外切。

S_7, S_8 精确定义为对应唯一根的半径分量之和。例如八圆根给出

$$S_8 = 1.85248889911127134591348776257857518591715578261971293402 17\ldots,$$

该显示值的误差小于 10^{-59}。**解出接触方程只能提供候选构型和局部信息，尚未证明全局最优。** 后续完整覆盖才完成这一点。

5. 全局覆盖：为什么没有漏掉另一种更好的排列

5.1 最长圆心对与有限对称归约

在任意合法排列中选取距离最大的两个圆心，编号为 0、1，并使 $r_0 \geq r_1$。利用正五边形的十个二面体对称，可使有向角

$$\alpha = \arg(p_1 - p_0) \in [\pi/10, 3\pi/10].$$

这只使用五边形本身的对称，不允许任意旋转容器。其余圆心按位于有向直线 p_0p_1 的上侧或下侧分组，枚举上侧数量。共线边界保留，所有不等式采用闭区间。

对其他圆心 i，令 $\beta_i = \arg(p_i - p_0)$、$\gamma_i = \arg(p_1 - p_i)$。因为 p_0p_1 是该三角形最长边，另外两个内角不超过 $\pi/2$，最长边对角至少 $\pi/3$。由此产生必要的角区间和

$$|\beta_i - \gamma_i| \leq 2\pi/3.$$

例如上侧点可取 $\beta_i \in [\pi/10, 4\pi/5]$、$\gamma_i \in [-2\pi/5, 3\pi/10]$；下侧交换这两个区间。

5.2 两种排序模型必须区别

$n = 4, 5, 6$ 的证书在每个侧组内部按半径排序；尚未指定的其他圆心差方向第一次分支覆盖整个 $[-\pi, \pi]$，分成四个象限。

$n = 7, 8$ 的证书改用每组内部的极角 β 排序，**不再额外假定同组半径排序**。同组 $i < j$ 时，差向量 $p_j - p_i$ 的某个连续展开方向属于

$$[\beta_j, \beta_i + \pi].$$

上侧 i、下侧 j 时，其方向属于

$$[\beta_i - \pi, \beta_j].$$

这些结论可由叉积恒等式验证，并包含共线端点。角度保持连续展开，不裁切回 $[-\pi, \pi]$。第一次分支从当前 β 外区间重建完整方向扇区，然后分成四个闭子区间；以后精确二分。每个角端点都是 π 的有理倍数。

因此，一个真正的构型总能选择一条根到叶路径。独立验证程序重建每一次传播和分支，不接受“已经搜遍”的文字声明。

5.3 每个节点的必要线性外近似

设差向量 $v = p_j - p_i$ 的方向属于 $[l, u]$，半宽 $h = (u-l)/2 < \pi/2$，中线单位向量为 q。不重叠与方向条件推出

$$\operatorname{cross}(q_l, v) \geq 0, \quad \operatorname{cross}(q_u, v) \leq 0, \quad q \cdot v \geq \cos h\,(r_i + r_j).$$

若最长圆心对的中线、半宽为 q_0, h_0，还可加入

$$\cos h_0\, q \cdot v \leq q_0 \cdot (p_1 - p_0).$$

这些只是必要条件，允许线性模型包含实际不可能的点；这种放松会使上界变弱，却不会误排除真正的构型。

此外加入全部墙约束、合法的编号顺序、先前已证明的小规模子集上界，以及面积外近似。面积外近似引入变量 t_i，实际构型取见证值 $t_i = r_i^2$，使用

$$2sr_i - t_i \leq s^2 \quad (s = j/20,\ j = 1, \ldots, 14), \qquad \sum_i t_i \leq \frac{5a}{2\pi}.$$

不需要强迫线性模型中的所有 t_i 等于平方，只需每个真实构型都有这样的合法见证。较晚提出的其他加强不等式不属于本次 n=1 至 8 已冻结的证明模型。

6. 线性规划结果怎样成为严格证书

写节点的外模型为 $Ax \leq b$、$x \in B$，其中 B 是明确的有界盒。对于任意非负有理向量 y，有

$$c \cdot x \leq y \cdot b + \operatorname{support}_B(c - A^T y).$$

右边包含**所有残差系数**，不要求 $A^T y = c$ 恰好成立。支持函数在盒上逐坐标精确求得。如果要证明不可行，则检查

$$\min_{x \in B} (y^T A x - y^T b) > 0.$$

求解器仅用来寻找合适的 y。验证程序把保存的有限小数解释为有理数，独立重建 A, b，以向外舍入区间评价整个式子。求解器的“成功”状态、浮点容差、文件里显示的近似上界均不作为证明依据。

所有角函数和根式也有严格包围。独立程序用有理 Machin 公式

$$\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)$$

及带余项界的级数构造三角函数区间，并以整数平方根包围根式。使用 Python 标准库整数及有理运算，不依赖原搜索程序、SciPy、线性规划求解器或 Arb 的数值结论。

完整有限树与近根叶

普通叶由严格上界 $S < T$ 或严格不可行证书关闭。剩下的“近根叶”追加必要条件 $S \geq T$，对每个圆心坐标和半径的正、负偏差分别给出上界，证明该叶中的竞争构型在适当的对称和重新编号后距离指定参考构型逐分量小于 5×10^{-7}。

n	竞争阈值 T	完成的连续邻域覆盖树节点数	普通上界叶数	近根叶数
3	1.034563887	112	56	1
4	1.250988879	483	252	2
5	1.447980550	1,926	1,041	4
6	1.651074768	10,737	6,189	8
7	1.740983298	74,392	45,627	1
8	1.852488897	1,044,679	666,151	1

表中“普通上界叶”不包括部分由角区间矛盾或严格不可行直接关闭的叶，因此不应仅用这些列倒推树的分支数。八圆的近根叶实际已给出小于 1.6379457×10^{-8} 的最大分量偏差，证明仍使用较宽的统一界 5×10^{-7}。

对于八圆，保存的完整树已由独立遍历核查全部 1,044,679 个节点：没有未关闭的前沿、重复后代或遗漏分支。祖先节点的有效上界在后代仍有效，验证时重新评价并保留这些上界。计算时曾如何分工不影响数学证书；最终检查对象是这一棵完整有限树。

7. 从近根覆盖到连续全局最优：缩放刚性论证

设精确构型为 z^*，可行竞争构型为 $z^* + \delta$，且其半径和至少为精确构型的半径和。全局近根结论以及正交变换的误差界保证

$$\|\delta\|_\infty \leq E_0 = 10^{-6}.$$

若 $E = \|\delta\|_\infty > 0$，令 $\eta = \delta / E$，则 $\eta \in [-1, 1]^{3n}$ 且 $\|\eta\|_\infty = 1$。精确接触墙给出齐次线性约束，目标比较给出

$$-\sum_i \eta_{r_i} \leq 0.$$

对于精确相切的一对圆，设 $v^* = p_j^* - p_i^*$、$d = \|v^*\| = r_i^* + r_j^*$、$q = v^*/d$。范数函数的 Hessian 在该邻域内的算子范数不超过 $1/(d - 2\sqrt{2}E_0)$。Taylor 上界和不重叠条件因此给出必要线性约束

$$\eta_{r_i} + \eta_{r_j} - q \cdot (\eta_{p_j} - \eta_{p_i}) \le \frac{4E_0}{d - 2\sqrt{2}E_0}.$$

所有分母均经严格验证为正。对这个缩放外模型，证书分别界定每个 $\pm\eta_j$。最大上界如下，均远小于 1：

n	所有有符号分量上界的最大值（向上放宽显示）
3	0.000046241896
4	0.000041615686
5	0.000044472128
6	0.000027293256
7	0.000140500
8	0.000122738

这与 $\|\eta\|_\infty = 1$ 矛盾，所以 $\delta = 0$。因此没有邻域内同分但不同的竞争构型，更不可能有更高分构型。结合全局覆盖，就得到连续全局最优及所述唯一性。

这一步比“Jacobian 满秩”或“局部优化收敛”更强：它显式排除所有满足不等式的有限扰动，而非只分析保持接触的扰动或一阶驻点。

8. 九位小数全局最优：必须回到官方格点

8.1 三个圆的简单情形

三圆有另一棵 108 节点的粗上界树，独立给出

$$S \le 1.034563887967754016861\ldots < 1.034563888.$$

半径和也必须是 10^{-9} 的整数倍，所以再结合精确可行的分数 1.034563887，直接得到 G_3，无须额外的局部格点分支。

8.2 四至八个圆的原坐标格点排除

对每个候选官方格点构型，先应用全局近根结论，再撤销对称归约。由于一般旋转不保持十进制格点，必须把参考构型搬回全部十个原坐标方向：

$$g_{k,\sigma}(x,y) = (\sigma(\cos\theta\, x - \sin\theta\, y),\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y), \quad \theta = 2k\pi/5,$$

其中 $k = 0,\dots,4$、$\sigma \in \{1,-1\}$。随后加上官方平移。

取每个参考坐标乘 10^9 后的最近整数基点 B。经过严格核查，所有潜在竞争者可写成整数向量 $B + z$，且每一分量 $z \in [-1001, 1001]$。保守的物理坐标误差采用 $E_g = 1002 \times 10^{-9}$。

墙约束是整数变量中的线性约束。对参考圆对再次使用范数的 Taylor 上界，得到必要条件

$$q \cdot (p_j - p_i) - r_i - r_j \geq -\frac{4E_g^2}{d - 2\sqrt{2}E_g}.$$

再加入“整数半径之和至少等于下一格分数”的条件。此处使用的是 $\geq$，不假定目标恰好等于阈值，也不假定竞争构型保持原接触图。

有理对偶界通过严格向上取整、向下取整收紧整数范围。每次整数分支把 $[L,U]$ 精确分成 $[L,k]$ 和 $[k+1,U]$；终端盒必须有严格正的 Farkas 矛盾。没有用数值容差把“几乎不可行”算成不可行。

n	排除的所有格点分数	原坐标格点证书规模
4	至少 1.250988879	十个方向，各在收紧后以一个矛盾叶关闭
5	至少 1.447980550	11 次整数收紧及一个严格矛盾
6	至少 1.651074768	十个方向，共 86,338 节点
7	至少 1.740983298	十个方向，共 11,278 节点
8	至少 1.852488897	十个方向，共 353,596 节点

五圆例外只有一个邻域，是因为精确五圆集合本身在全部十个对称下仅改变圆的排列，不是因为忽略了格点的方向问题。

最后逐个对 `answers/n01.json` 至 `answers/n08.json` 中的构型作精确可行性检验。圆间约束乘上 10^{18} 后直接检查整数平方距离；墙约束使用精确代数符号检验。上下界吻合，得到第一页的八个精确格点最优值。

特别地，**不能把连续最优值向下取整就当成格点最优值**。例如 S_6 的九位小数截断是 1.651074770，但格点最优值是 1.651074767，差异来自圆心格点与同时接触条件。

9. 证明依赖：没有把待证结论循环用作上界

线性外模型中的子集约束使用保守的**连续**上界，而非更小的格点最优值：

$$U_3 = 1.034563888, \quad U_4 = 1.250988880, \quad U_5 = 1.447980551, \quad U_6 = 1.651074771, \quad U_7 = 1.740983300.$$

依赖顺序如下：

- $n = 1, 2$：前述初等几何和精确格点比较。
- U_3：独立的三圆粗上界树。
- 四圆：使用 U_3；完成四圆覆盖后得到 U_4，再以局部刚性得到精确 S_4。
- 五圆：使用 U_3，独立得到 U_5；精确 S_5 由构造、覆盖与刚性联合得到。
- 六圆：使用 U_3, U_5，得到 U_6 与精确 S_6。
- 七圆：使用 U_3, U_4, U_5, U_6，得到 U_7 与精确 S_7。
- 八圆：使用上述全部已证明上界，得到精确 S_8。

三圆连续刚性证明可以使用已经独立证明的粗上界 U_3，这不等于预先假定精确 S_3。所有依赖都是明确的先行证书，不能拿未结束的搜索前沿或未经独立验证的优化值充当定理。

10. 读者怎样复验

10.1 文件分工

- `answers/n01.json` 至 `answers/n08.json`：官方坐标中的精确九位小数构型。
- `n3_proof/` 至 `n8_proof/`：全局树、接触根、局部刚性和格点排除的有限证书。
- 根目录中 `verify_*.py`、`prove_n1_grid_optimum.py`、`prove_n2_grid_optimum.py`：独立验证程序。
- `manifest_sha256.json`：分发文件的完整性清单；哈希验证本身不是数学证明。

附录保留原数学推导，并标注其中历史生成文件名与本整合包独立复验入口的区别。最终结论以本说明、所附完成审计报告及完整入口的实际复验结果为准。

10.2 三种检查深度

在解压后的证明包根目录中运行，使用常规 Python 3；验证器只依赖标准库，不需要安装 SciPy 或运行原来的优化搜索程序。

仅检查八个答案确实合法：

```
python verify_all.py
```

检查文件完整性、既有已验证文件的字节身份、验证器可导入性、必需输入路径以及八个答案：

```
python verify_proofs.py --quick
```

`--quick` 不重新遍历证明树，不是完整数学证明复验。 完整复验使用：

```
python verify_proofs.py --output replay_result.json
```

支持 `fork` 和 `pread` 的系统可把八圆全局树分成三个互不重叠的根组检查：

```
python verify_proofs.py --workers 3 --output replay_result.json
```

其他系统保留默认单进程。不要用 `python -O` 或 `python -OO`，因为断言是检查的一部分；入口也会拒绝优化模式。

完整入口明确检查三圆连续证明、四/五/六圆格点证明，并重新调用八圆及其全部先行连续和格点依赖；一个根组失败、一个分支遗漏、一个必要不等式符号不成立，都不会得到完整通过结果。

10.3 时间、内存与临时磁盘

完整复验可能需要数十分钟或更久，取决于处理器、并行设置及磁盘，不应把快速完整性检查的耗时当作全证明耗时。

压缩证书并不全部一次读入内存。八圆局部格点证书按方向流式读取；全局树则需要随机访问，验证器会将 `.xz` 顺序解压到临时文件，再在内存中建立节点偏移索引，按需读取单个节点。因此它是**磁盘索引式、受控内存**复验，不是“完全无需临时磁盘”的流式复验。

八圆全局树解压后为 2,871,835,055 字节，约 2.87 GB（2.67 GiB）；此外还有较小证书及索引开销。请为系统临时目录预留至少约 4 GB 空间，并另行保留已解压证明包所需空间。临时目录默认由 Python/操作系统选择；空间不足时可把 `TMPDIR` 指向有足够空间的位置。三进程模式共享只读索引的初始数据，但仍会增加工作内存需求；内存紧张时使用默认单进程。

完整数学信任边界是：本文给出的几何归约正确；独立验证程序正确执行其明确的整数/有理区间检查；所验文件与分发证书一致。这里没有声称已在形式化证明助理中完成内核级形式验证。

11. 来源、已有构型与结论边界

Erich Friedman 的公开页面 Packing Copies to Maximize Total Perimeter: Circles in Pentagons 列出了相关构型，并把此处涉及的多圆构造归功于 Jonathan Viquerat（2026 年 6 月）。五、六圆的简洁公式也是已公开的构造。本材料使用并精确化这些已知候选，不宣称首次发现这些排列，也不提出未经文献核查的历史优先权主张。

两圆连续问题另有一般性文献背景：Uuganbaatar Ninjbat, “On Malfatti’ s Marble Problem,” Arnold Mathematical Journal 2, 309-327 (2016)，DOI: 10.1007/s40598-016-0047-5。该文的定理 5 关于可切凸多边形内两圆半径和，涵盖这里的连续两圆情形；本文第 2 节给出了该特殊情形的直接证明。此文献并不自动解决官方九位小数格点问题。

公开网页中有限位数的显示值既不是严格上界，也不能自动当成已认证的下界或向下截断值；本材料的严格结论来自明确构造、完整有限覆盖和向外舍入证书。结论范围严格为 **n＝1 至 8**，不包含九圆或更多圆的全局最优性声明。